Problemes

Al darrer **SCM/Notícies** vàrem oblidar agrair la recepció de diverses solucions. Ho fem ara, tot demanant disculpes.

En Lluís Caminal Homar de l'IES Carles Vallbona de Granollers dóna solucions als problemes A20 i A21.
En Quim Nadal i Vidal de l'IES de Cassà de la Selva ens envia les solucions A21 i A22.
Albert Bailo (estudiant a l'IES Alexandre Satorras) ha enviat una altra solució del problema A17 fent servir conceptes i fórmules de trigonometria.

El problema dels camaleons (A23) va aparèixer en una mostra de problemes proposats a un Concurs Internacional anomenat *International Mathematics Tournament of Towns*, (IMTT), que agrupa diferentes ciutats del món.

En propers números de **SCM/Notícies** proposarem d'altres problemes d'aquest concurs. Per avui, amb els que podeu trobar en una altra secció de l'Olimpíada catalana i els que us proposem tot seguit de l'Olimpíada Iberoamericana potser ja en teniu prou! Esperem les vostres solucions!

Problemes proposats

Problemes de la XII Olimpíada Iberoamericana de Matemàtiques. Guadalajara, Jalisco, 16 i 17 de setembre de 1997.

Primer dia. (Durada: 4h 30 min)

Problema 1. Sigui $r \geqslant 1$ un nombre real que compleixi la propietat següent:

> Per a cada parella de nombres enters positius, m i n, amb n múltiple de m, es té que $[nr]$ és múltiple de $[mr]$.

Demostreu que r és un nombre enter.
Nota: Si x és un nombre real, denotem com $[x]$ el més gran enter que és més petit o igual que x.

Problema 2. Amb centre en l'incentre I d'un triangle ABC, tracem una circumferència que talla cadascun dels tres costats del triangle en dos punts: el segment BC en els punts D i P (sent D el més proper a B); el segment CA en els punts E i Q (sent E el més proper a C), i el segment AB en els punts F i R (sent F el més proper a A).

Sigui S el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $EQFR$. Sigui T el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $FRDP$. Sigui U el punt d'intersecció de les diagonals del quadrilàter $DPEQ$.

Demostreu que les circumferències circumscrites als triangles FRT, DPU i EQS tenen un únic punt en comú.

Problema 3. Siguin $n \geqslant 2$ un enter i D_n el conjunt de punts (x, y) del pla amb coordenades enteres que compleixen $-n \leqslant x \leqslant n$ i $-n \leqslant y \leqslant n$.

(a) Disposem de tres colors; cadascun dels punts de D_n s'acoloreix amb un d'aquests colors. Demostreu que, independentment de com s'hagi fet la coloració, sempre hi ha dos punts de D_n del mateix color tals que la recta que els conté no passa per cap altre punt de D_n.

(b) Trobeu una forma d'acolorir els punts de D_n fent servir quatre colors de manera que si una recta conté exactament dos punts de D_n, llavors aquests dos punts tenen colors diferents.

Segon dia. (Durada: 4h 30 min)

Problema 4. Sigui n un enter positiu. Considerem la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, on els valors que poden prendre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ són únicament 0 i 1. Sigui $I(n)$ el nombre de $2n$-ades $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ per a les quals el valor de la suma és un nombre imparell i sigui $P(n)$ el nombre de $2n$-ades $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ per a les quals la suma pren un valor parell. Demostreu que $\dfrac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n+1}{2^n-1}$.

Problema 5. En un triangle acutangle ABC siguin AE i BF dues altures, i sigui H l'ortocentre. La recta simètrica de AE respecte de la bisectriu (interior) de l'angle en A i la recta simètrica de BF respecte de la bisectriu (interior) de l'angle en B s'intersequen en un punt O. Les rectes AE i AO tallen per segona vegada la circumferència circumscrita al triangle ABC en els punts M i N respectivament. Siguin P, la intersecció de BC amb HN; R, la intersecció de BC amb OM; i S, la intersecció de HR amb OP. Demostreu que $AHSO$ és una paral·lelogram.

Problema 6. Sigui $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{1997}\}$ un conjunt de 1997 punts de l'interior d'un cercle de radi 1, sent P_1 el centre del cercle. Per a cada $k = 1, \dots, 1997$ sigui x_k la distància de P_k al punt de $\mathcal{P}$ més proper a P_k i diferent de P_k. Demostreu que

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{1997}^2 \leqslant 9.$$

Solucions

Problemes proposats a SCM/Notícies-6

A23. [IMTT] A l'illa de Camelot viuen 13 camaleons grisos, 15 de color marró i 17 de color lila. Si dos camaleons de diferent color es troben, canvien simultàniament al tercer color (per exemple, si es troben un camaleó gris i un de marró, tots dos canvien a lila). És possible que tots els camaleons de l'illa tinguin alhora el mateix color?

Solució (Quim Nadal Vidal (IES Cassà de la Selva)). Després de x trobades gris–marró; y trobades gris–lila; z trobades marró–lila tindrem

$$\begin{cases} 13 - x - y + 2z & \text{camaleons grisos} \\ 15 - x + 2y - z & \text{camaleons marrons} \\ 17 + 2x - y - z & \text{camaleons liles} \end{cases}$$

Si tots tinguessin el mateix color, tindríem:

$$\begin{cases} 13 - x - y + 2z & = & 45 & \text{o} & 0 & \text{o} & 0 \\ 15 - x + 2y - z & = & 0 & \text{o} & 45 & \text{o} & 0 \\ 17 + 2x - y - z & = & 0 & \text{o} & 0 & \text{o} & 45 \\ & & \text{(A)} & & \text{(B)} & & \text{(C)} \end{cases}$$

en el cas que tots fóssin grisos (A) o tots marrons (B) o tots liles (C). Si a la segona equació li restem la primera obtenim

$$3(y - z) = -47 \text{ o } 43 \text{ o } -2.$$

I per tant, $y - z = -47/3$ o $43/3$ o $-2/3$, clarament impossible ja que $y - z$ ha de ser enter. Per tant, els camaleons no poden acabar tenint tots els mateix color.

Altres idees: Hem rebut solucions de Lluís Caminal Homar (IES Carles Vallbona, Granollers); Joan Trias, UPC; Roger Trias Sanz (estudiant de 1r d'enginyeria de telecomunicació a la UPC); Faust Mas Salom, estudiant de la UAB.

A24. Demostreu que si x, y, z i n són enters positius i $n \geqslant z$, llavors la igualtat $x^n + y^n = z^n$ no pot donar-se.

Solució (Anna Pol, IES Jaume Vicens Vives de Girona). Si es donés la igualtat, tindríem que $x \leqslant z - 1$, $y \leqslant z - 1$. Així, si demostrem $(z-1)^z + (z-1)^z < z^z$, quedarà provat que $x^z + y^z < z^z$ i, en aquest cas, si $n \geqslant z$, serà

$$x^n + y^n =$$
$$= x^{n-z}x^z + y^{n-z y^z} < z^{n-z}(x^z + y^z) < z^{n-z}z^z =$$
$$= z^n.$$

Per demostrar que $(z-1)^z + (z-1)^z < z^z$, observem que $z^z - (z-1)^z =$ es pot escriure com el producte de $(z - (z-1))$ per

$$(\underbrace{z^{z-1} + z^{z-2}(z-1) + \cdots + z(z-1)^{z-2}}_{z-1 \text{ termes, tots ells } > (z-1)^{z-1}} + (z-1)^{z-1})$$

i, per tant, és més gran que $(z-1)^z$.

Altres idees: Hem rebut solucions de Lluís Caminal Homar (IES Carles Vallbona, Granollers); Quim Nadal Vidal (IES Cassà de la Selva).

A25. Demostreu que el nombre $m(m+1)$ no pot ser la potència d'un enter per cap valor enter de m.

Solució (Quim Nadal Vidal (IES de Cassà de la Selva)). Si $m(m+1) = n^k$ amb $k \geqslant 2$, com que m i $m+1$ són primers entre sí, tindríem que $m = r^k$ i $m + 1 = s^k$ i a partir d'ací,
$1 = s^k - r^k = (s-r)(s^{k-1} + s^{k-2}r + \cdots + sr^{k-2} + r^{k-1}$
i com que $s > 1$ i $r > 1$ la igualtat és clarament impossible.

Altres idees: Hem rebut solucions de Lluís Caminal Homar (IES Carles Vallbona, Granollers); Roger Trias Sanz (estudiant de 1r d'enginyeria de telecomunicació a la UPC).

XXXIII Olimpíada Matemàtica. Fase estatal (València, 7 i 8 de març de 1997)

Problema 1. Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica, sabent que la suma d'aquests termes és -1 i la suma dels termes de lloc parell és $+1$.

Solució (Redacció). Si anomenem a_i els termes de la progressió, i d la seva diferència, tenim que $-1 = \sum_{i=1}^{100} a_i = (2a_1 + 99d)50$ i $1 = \sum_{i=1}^{100} a_{2i} = (2a_1 + 100d)25$ d'on es treu $a_1 = -149/50$ i $d = 3/50$. Ara bé,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{N} a_i^2 = Na_1^2 + 2a_1 d \sum_{j=1}^{N} j + d^2 \sum_{j=1}^{N} j^2 = \\ &= Na_1 + a_1 dN(N-1) + d^2(N-1)^3/3 + \\ &\quad +(N-1)^2/2 + (N-1)/6. \end{aligned}$$

Per $a_1 = -149/50, d = 3/50$ i $N = 100$
tenim $S = 14999/50$

Altres idees: Hem rebut solucions de Quim Nadal Vidal (IES Cassà de la Selva) i d'Esteve Casas Juncà.

Problema 2. Un quadrat de costat 5 unitats es divideix en 25 quadrats unitat mitjançant rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors al quadrat que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no pertanyen a cap dels costats del quadrat inicial. Quin és el nombre més gran de punts de A que és possible escollir de manera que tres qualssevol d'ells NO siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles?

Solució (Oficial de la OM). Provarem que el màxim és 6. Numerem els punts de A de la manera següent:

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

És fàcil veure que cap terna dels punts

$$1, 2, 3, 8, 12, 16$$

forma un triangle rectangle isòsceles. Suposem que hi hagués un conjunt de 7 punts amb la propietat de l'enunciat (és a dir, que no contingui cap terna de punts que formi un triangle rectangle isòsceles). Observem que si 4 punts formen un quadrat, com a molt en podrem escollir dos d'ells per al nostre conjunt. Com que els punts $1, 4, 16, 13$ formen un quadrat, i anàlogament el punts $2, 8, 15, 9$ i els punts $3, 12, 14, 5$, com a molt 6 dels punts escollits seran del "contorn extern" de A. D'això en resulta que almenys un dels punts $6, 7, 10, 11$ haura de ser dels escollits. Podem suposar, per la simetria de la figura, que és el 7.

Per altra banda, $7, 16, 9$ formen un triangle rectangle isòsceles, i el mateix passa amb $1, 7, 14$, amb la qual cosa com a molt dos dels punts $1, 9, 14, 16$ podran formar part del nostre conjunt. Però els punts $5, 7, 13, 15$ formen un quadrat i, per tant, com a molt en podrem escollir un entre $5, 13, 15$.

D'això es dedueix que hem d'escollir almenys 3 punts entre

$$2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12.$$

Pel principi del colomar, s'han d'escollir almenys dos punts d'un dels conjunts $3, 6, 11, 8$ o $2, 4, 10, 12$.

És fàcil veure que si els dos punts són del primer d'aquests conjunts, llavors hi ha dues possibilitats: 3 i 11, o 6 i 7 (no es poden escollir, en ambdós casos, més punts en el quadrat al qual pertany 7).

Anàlogament, si els dos estan en el segon conjunt, les possibilitats també són dues: 2 i 12, o 4 i 10 (no es poden escollir, en ambdós casos, més punts en el quadrat al qual pertany 7).

Aquesta contradicció demostra que no es poden escollir més punts en el quadrat que conté el 7 i, així, el nombre màxim de punts és 6.

Problema 3. Considereu les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es traça una circumferència. Demostreu que totes les circumferències que resulten per tots els valors $p \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{R}$ passen per un punt fix i determineu aquest punt.

Solució (Esteve Casas Juncà). Els tres punts de tall seran $(x_1, 0), (x_2, 0)$ i $(0, x_1 x_2)$. Les circumferències que passin per aquests tres punts tallaran l'eix OY en un quart punt, $(0, y)$. Si considerem la potència de l'origen de coordenades respecte de aualsevol de les circumferències anteriors, tindrem que $x_1 \cdot x_2 = (x_1 x_2) \cdot y$ i, en conseqüència, $y = 1$. Totes les circumferències passen per $(0, 1)$.

Altres idees: Hem rebut una solució anàloga de Quim Nadal Vidal (IES Cassà de la Selva).

Problema 4. Sigui p un nombre primer. Trobeu tots els nombres $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un nombre enter.

Solució (Quim Nadal Vidal (IES de Cassà de la Selva)). Si $k^2 - pk = n^2$, el discriminant de l'equació $k^2 - kp - n^2 = 0$ ha de ser un quadrat perfecte, $p^2 + 4n^2 = t^2$. D'aquí, $(t - 2n)(t + 2n) = p^2$i com que p és primer, tenim una de les tres possibilitats següents:

1.

$$\left.\begin{aligned} t - 2n &= p \\ t + 2n &= p \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad k = p;\ k = 0.$$

2.

$$\left.\begin{aligned} t-2n &= 1 \\ t+2n &= p^2 \end{aligned}\right\}$$

En aquest cas serà

$$k=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2;\ k=-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

3.

$$\left.\begin{aligned} t-2n &= p^2 \\ t+2n &= 1 \end{aligned}\right\}$$

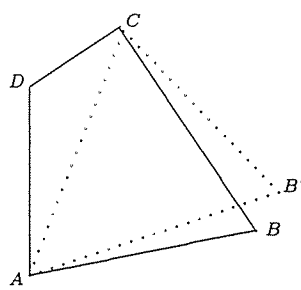
Aquesta última possibilitat ens porta a acceptar valors negatius per n i comporta les mateixes solucions que el cas 2).

Altres idees: Hem rebut també una solució d'Esteve Casas.

Problema 5. Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i les diagonals no és més petita que $2(2+\sqrt{2})$.

Solució (Seguim, en línies generals, la solució proposada per Esteve Casas). El número $2(2+\sqrt{2})$ és exactament la suma de les longituds dels quatre costats i les dues diagonals d'un quadrat d'àrea 1. Hem de veure que, d'entre tots els quadrilàters convexos d'àrea donada, el quadrat és el que té mínima la suma considerada a l'enunciat.

Considerem un quadrilàter convex, $ABCD$. L'anirem modificant, tot mantenint l'àrea, fins a arribar al quadrat. Primer de tot, el triangle ABC, es pot convertir en isòsceles, $AB'C$ amb $AB' = B'C$, tot mantenint constant l'àrea.



El perímetre de $AB'C$ és menor o igual que el perímetre de ABC (cosa que es demostra fàcilment per simetria). Fem la mateixa operació amb el triangle ADC i passem a $AD'C$ isòsceles ($AD' = D'C$). Tenim un nou quadrilàter, $AB'CD'$ que té la mateixa àrea que l'anterior i el perímetre junt amb les diagonals (que no s'han modificat) és menor o igual.

Aplicant novament el mateix procediment als triangles $AB'C'$ i $B'CD'$ i arribem a un rombe $A'B'C'D'$ amb la mateixa àrea que el quadrilàter inicial i amb perímetre més diagonals menor o igual. Per últim, d'entre tots els rombes de la mateixa àrea ($dd'/2$, si d i d' són les diagonals) el que té el perímetre mínim és el quadrat (senzill exercici d'optimització).

Altres idees: Hem rebut una solució de Quim Nadal Vidal (IES Cassà de la Selva) que arriba al resultat analíticament minimitzant les àrees dels quatre triangles que s'obtenen des del punt d'intersecció de les diagonals.

Problema 6. Per tal de donar una volta completa en cotxe a un circuit circular, la quantitat exacta de benzina que es necessita està distribuïda en dipòsits fixes situats en n punts arbitraris, diferents, del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que sigui quina sigui la distribució del combustible en els dipòsits, sempre existeix un punt de partença a partir del qual es pot donar la volta completa. Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància recorreguda i que el dipòsit del cotxe té capacitat suficient per a contenir tota la gasolina.

Solució (Esteve Casas). Escollim com a punt de partida, P_1, aquell punt on el tros de circuit que es pot recorrer abans de quedar-nos sense benzina sigui màxim. Suposem que no podem completar la volta sencera, és a dir arribar fins a $P_{n+1} = P_1$. Sigui P_k l'últim punt on hem pogut carregar benzina, $k \leqslant n$. Haurem arribat a una posició d tal que $k \leqslant d < k+1$. Si $k = n$, hem esgotat tota la benzina i no hem acabat de fer la volta: contradicció. Si $k < n$, partint de P_{k+1} (sense gens de benzina) mai podrem arribar a P_1 perquè aconseguiríem un recorregut més gran que començant de P_1, i aquest fet contradiria la maximalitat del recorregut des de P_1: contradicció. Per tant, partint de P_1 podem fer la volta sencera.

Altres idees: Hem rebut solucions, essencialment similars, de Lluís Bibiloni (UAB), de Jaume Paradís (UPF) i de Juanjo Egozcue (UPC).